应用运筹学3.9论文研读

1. **基本信息**

|  |  |
| --- | --- |
| 论文标题 | Breaking the 3/4 Barrier for Approximate Maximin Share |
| 作者 | Hannaneh Akrami，Jugal Garg |
| 出版物 | 发布于arxiv平台 |
| 页数 | 32 |
| 链接 | <https://arxiv.org/abs/2307.07304> |
| 发表时间 | 2023.7.24 |

1. **论文内容**

2.1问题描述与背景

概括而言，此文着力解决物品公平分配相关的问题。

对于一组具有加性估值且不可分的物品，在不同个体（agent）对每个物品具有不同价值评估的前提下，我们需要考虑一定的策略，使这些物品分为n个小组（bundle），再分配给n个不同的个体，且使分配结果相对公平。

将这个问题转化为数学抽象表示，即我们有M个不可分的物品；N个不同的个体N = {1, 2, . . . , n}；这n个不同个体对这组物品均有自己的价值考量V = (v1, . . . , vn) （其中vi为向量表达，表示一个个体对所有物品的价值考量）；而对于这M个物品，我们需要寻找一个分配A = <A1, A2, . . . , Ani> ，使得 vi(Ai) 的计算值尽可能公平。

在这个问题中，我们需要明晰“公平”的概念。对于此类分配问题，现主要有两种主流的公平分配指导：基于嫉妒（envy-based）的分配和基于分享（share-based）的分配。沿用给出的抽象数学表示，对于基于嫉妒的分配来说，“公平”是在A的分配下，保证 vi(Ai) ≥ vi(Aj)的成立，即个体i对于任意其他个体的分配物品组的加性估值，一定不大于自身已分配物品组的加性估值大小，通俗来讲，将物品先分为n组后，每个人都从中选择了对自己最有利的一组。对于基于分享的分配而言，每一个体往往会持有一个物品组加性价值的阈值（threshold）下限，如果对所有的个体而言，他们各自分配的物品组加性价值都大于了这些阈值下限，则称为这个分配是公平的。

在此文中，作者考虑的是分享公平的问题。且对于加性和下限的设置，往往采用最大最小分享值（Maximin Share，后称“MMS”）作为阈值。

对于M个不可分的物品，可以有多种将它们分配为n个小组的方法，我们将一个具体的分配方法称为P = { P1,P2, ....., Pn}，对于每个个体而言，它会得到该分配方法对映的一个物品组Pi。对于任意个体i，我们赋予它将这M个物品分为n个小组的权利（即分配方法P）；但个体i必须选取这个分配下、对于它的价值考量而言，加性估值最小的物品组（Pi）；此时个体i会得到一个相对最小的物品组加性估值结果vi(Pi)（即min vi(Pk)，其中k = 1, 2, ... , n）。而对于不同的物品组分配P，我们都会得到一个对映的 min vi(Pk), (k = 1, 2, ... , n)，在所有分配P对映的 min vi(Pi) 中的最大值，就被定义为MMSi，即 max min vi(Pi)。在最终的分配A中，若所有个体分配的物品组对映的加性价值大于它们各自计算而得的MMSi时，我们即认为这个分配是分享公平的。

2.2相关问题研究现状

对于上述基于分享公平的分配问题，如果我们仅取MMSi作为各个个体的设定阈值，在一些情况下，可能并不存在可行公平分配的存在。因而在此问题上，研究开始偏向为MMSi乘以一个系数α，以保证在αMMSi的阈值设定下，该问题一定可以得到公平分配的方案；在此基础上，追求α尽可能的接近于1。

在MMS问题本身的研究上：

Procaccia and Wang证明了α = 2/3 时，公平分配方案存在的必然。

后续改进的工作将α系数的数值提升至3/4 + min( 1/36, 3/(16n-4) )，其中n为不同个体的数量，但该式需要保持一个较大的数值n。

Garg and Taki 使用复杂的分析，创造了一个简单的计算算法，将α系数提升至3/4 + 1/12n；并使3/4-MMS 分配问题变得在多项式时间内可解。

后续工作证明了在使用Garg and Taki算法的前提下，不存在比3/4更优的α常数因子MMS分配问题。

另外，一些工作也开始探索在特殊情况下MMS分配问题的性质：

在m ≤ n + 5的特殊情况下，证明了MMS分配问题一定存在公平分配。

当 n = 2时，MMS分配问题一定存在公平分配；当n = 3时，α-MMS分配问题中系数可以提升至11/12；当n = 4时，现已证明 4/5 - MMS分配中公平分配解的必然存在。

2.3本文取得的成果

创新性的理论贡献：本文在物品公平分配问题的理论研究中实现了重要突破。通过引入新的reduction rules和改进的bagfill方法，本文不仅提升了对问题本质的理解，还推进了数学理论在实际复杂问题中的应用。

α-MMS分配问题的重要进展：也本文最主要的成果，证明了α-MMS分配问题存在“3/4+常数因子”；且使用该因子数值时，此问题必然存在公平分配解。本文也是计算得到了该常数因子，将α的数值提升至3/4 + 3/3836.

对特殊情况的深入探讨：本文在特殊情况下（如物品数量与个体数量关系较为紧密的情况）对MMS分配问题进行了深入研究和探索。

算法设计的优化：本文通过创造性的算法设计，提高了求解效率，使得在多项式时间内解决3/4-MMS分配问题成为可能。

扩展应用的可能性：虽然本文聚焦于特定的分享公平分配问题，但其理论和方法的核心思想可能适用于更广泛的经济和社会问题，如收入分配、资源分配等。这为不同领域的研究者提供了新的研究途径和工具。

2.4关键思想和方法

我们以详细梳理本文的证明体系为脉络，进行关键思想与方法的展开：

1. 本文先介绍了些许证明需要的与MMS分配问题相关的基础知识。包括order instance，normalized instance，reduction rules等概念。Order与normalized等概念的使用，可以将MMS分配问题转化为较为标准的统一形式，这对于证明的过程可以提供极大的帮助。

具体来说，有序实例(Ordered Instance)被定义为，m件商品初始序列对于每个代理的价值是递减的；Order(I) 是原实例通过改变每个个体Vi估值函数，使得第j个物品对于任何个体的估值都是第j大的；规范化实例(normalized instance)的算法，是对于每个代理个体i，首先寻找能够得到MMS的划分，再修改Vi,j估值函数为第i个代理在其MMS的划分中第j个物品在该物品所在组对于代理i来说占据的总价值的比例。（因此对于任何一个代理i来说，由于构造MMS的划分是固定的，故该划分中相同组的物品的Vi求和一定为1。）此外reduction是将问题的可行解不断分离出子问题的可行解，从而在仍然满足约束条件的情况下，逐渐削减个体和物品的规模，从而简化问题的思路。所谓“可行”，定义了有效削减(valid reduction)，简单来说，一方面保证从原集中削出的部分需要满足α-MMS保护，一方面使剩下的部分每个代理个体基于剩余物品集的MMS不会减少（α-MMS条件只会因为reduction变紧）。

另外，除却以往提出的三类reduction rules：

R1 α(I) : If vi(1) ≥ α for some i ∈ N, allocate {1} to agent i and remove i from N.

R2 α(I) : If vi({2n − 1, 2n, 2n + 1}) ≥ α for some i ∈ N, allocate

{2n − 1, 2n, 2n + 1} to agent i and remove i from N.

R4 α(I) : If vi({1, 2n + 1}) ≥ α for some i ∈ N, allocate {1, 2n + 1} to agent i and remove i from N.

本文在沿用这些reduction rules的基础上，提出了另外两类reduction rules，便于证明工作的展开。这与证明在bagfill阶段的作法相对映，因而在后续详细展开。

R3 α(I) : If vi({3n−2, 3n−1, 3n, 3n+1}) ≥ α for some i ∈ N, allocate

{3n−2, 3n−1, 3n, 3n+1} to agent i and remove i from N.

R5 α : If vi(1) + vi(2) ≥ α for some i ∈ N, allocate {1, 2} to agent i and remove i from N. The priority is with agents in N2 1 ∪ N2 .

此部分关键的突破点在于本文在使用reduction rule对给定的instance进行变化（reduce）时，允许MMSi的数值产生一定的降低，且限制这一降低乘数因子最多为1-4ε，从而在保持α-MMS保护的前提下，有效简化问题规模，具体作用在下一部分阐述。

另一关键的结论，即文中的“假设1”；结合reduction rule分析，若当前的instance已不满足一些reduction rule的条件时，instance中剩余的部分会满足一定的具体数学关系，如：

不满足R1时， for all k ≥ 1, vi(k) < α

不满足R2时，for all k > 2n, vi(k) < α/3

不满足R3时， for all k > 3n, vi(k) < α/4

这对于后续的证明提供了很大的数据支持与范围界定。

1. 根据1中提出的新reduction rule，文章先对此证明，经过reduce操作转换，MMSi数值最多只会降低1 - 4ε；在此系数的基础上，进一步证明当完成reduce、order、normalize等一系列转换后，对于原instance，可以得到min(3/4 + ε,(1 - 4ε)α)的结果。

在证明的过程中，主要是用了递推与讨论的方法。以内reduce过程1 - 4ε系数的存在，可以得出在经过normalize操作后，MMSi的数值会被提升1/(1 - 4ε)倍。

1. 在系数证明的最重要部分，本文在已有工作的基础上，将N个个体分为三类；取代了原有的两类分发（N1 = {i ∈ N | ∀k ∈ [n] : vi(Bk) ≤ 1}与N2 = N \ N1 = {i ∈ N | ∃k ∈ [n] : vi(Bk) > 1}），这主要是考虑到两个问题：当reduction不断进行时，剩余代理个体的估值函数不能被常数1/4而是ε线性bound住；其次在部分实例中所有代理个体可能会被全部划分到N1中。具体的三类分法沿用N2，只是将N1拆分为N11与N12两类，其中：

N11 = {i ∈ N1 | vi(2n + 1) ≥ 1/4 − 5δ}

N12 = N1 \ N11（表示N1集合中非N11的部分）

且当N11的集合较小时，采用原有的办法，优先对N11进行bagfill，进行定理的证明；而当N11集合过大时，采用新提出的算法，优先对剩余的部分进行bagfill，再处理N11部分。具体的大小划分为n( 1/4 − δ)/( 1/4 +δ/3 ) ，这一数字的设定应该是从证明的过程中获得。

1. 先证明当N11集合较小时，依然使用已有的bagfill方法，对此进行证明。并且巧用大小划分的阈值与normalize后，vi(M)之和为n的限制，说明剩余的N2与N12部分，一定可以获得相应的价值和物品分配。
2. 当N11集合较大时，本文提出了一种新的bagfill方法，区别于以往工作将第k个物品与第2n - k + 1个物品放入同一包裹；文章选择将第k个物品、第2n - k + 1个物品与第2n + k这三个物品放入同一包裹；并在证明过程中根据不同物品在order排序中不同的位次，赋予他们不同MMSi数值范围与各项 vi(gi) 数值范围。还是主要根据“vi(M)之和为n”的限制，进行假设证伪的证明；说明在不同的情形下，被分开的三个部分都可以获得足够3/4 + δ价值的物品组。

而期间R3与R5这两个reduction rule的使用，也是为了从抽象的数值计算中获得 vi(gi) 与MMSi数值更精确的范围，从而推出若存在三类个体之一没有获得足够价值和物品的冲突情况。

**3.小组见解**

*（部分重要证明将在我们组课堂presentation的时候给出，此处在大致理清全文结构后提出了初步研究遗留的问题和看法）*

为了证明α至少是3/4大致思路是，对于α ≤ 3/4，从任意实例中获得有序规范化α-不可约实例 (α-ONI)，使得变换是α-MMS保持的，即可通过给定所得有序规范化不可约实例的α-MMS分配而获得原始实例的α-MMS分配。而当α＞3/4时，代理的MMS值可能在采用R4限制时逐渐下降，R4是否为有效约化(valid reduction)有待商榷，而本文则是关注到MMS下降的幅度，在任意次的约化调用后，确定一个乘法因子的上界，相应地丢失近似因子(1-4ε).

3.1初步探究存在的问题：

a) lemma4的证明中，在给出定义|S| ≤ 2的前提下，给出“Let g1, g2 ∈ S. In case |S| = 1, g1 = g2”这个说明是什么意思？后续的lemma4的证明过程与这个“设定”又有什么关联？

b) 在lemma7的证明过程中，使用了假设1中的结论“在l > 2n的前提下，vi(l) < 1/4 + ǫ/3”，但是这一假设的提出，前提为 R2这一关系法则（reduction rule）在当前分配子问题中不能继续使用；而在lemma7的证明前，文章特别强调了“we assume all the goods in G4 are removed first, and then the goods in G2 and G3 are removed in their original order”，因而感觉在lemma7证明中使用此结论有失严谨性。

c) 计算MMS需要考虑m个物体构成的集合的划分方式，该问题其实可以被抽象成将m 个不同物品划分成n 个非空、不可区分（即顺序不重要）的组的方法数。这是一个经典的组合问题，可以使用第二类斯特林数（Stirling numbers of the second kind）来解决。第二类斯特林数S(m,n) 表示将m 个不同对象划分成 n 个不可区分的非空集合的方法数。其递归公式如下：S(m,n)=n\*S(m-1,n)+S(m-1,n-1)，其中初始条件为S(0,0)=1且当n=0或m<n时，S(m,n)=0，目前该递归公式尚未能写成多项式的形式，因此当m,n较大时，是否能确定划分数能够被m,n多项式函数bound住，即计算MMS是否能在多项式时间完成。

3.2另外见解：

Bagfill阶段，分两类被限制与1/n，分三类就可以突破这个限制，得到常数因子的结果；这会不会是因为使用了更多的goods作为确切的载入物品，而不是仅仅把它们当做价值和不够3/4 + δ才使用的填补对象。那可不可能推广到每类包含k个物品，n个物品（物品不够可以靠0作为dummy goods），或者说取到一个更优的最小包裹内含物品数，来提升α的常数数值。

另一方面，文中得到的3/3836也好，3/956也好，在证明过程中看来也并不一定是最切确的常数表示。总感觉在证明的过程中，数值与等价关系的放缩，总显得过于宽松，会不会还有更好的解存在。

**主要参考文献：**

1. H. Akrami and J. Garg, “Breaking the $3/4$ Barrier for Approximate Maximin Share.”arXiv, Jul. 24, 2023. Accessed: Nov. 13, 2023. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/2307.07304>.
2. Hannaneh Akrami, Jugal Garg, Eklavya Sharma, and Setareh Taki. Simplification and improvement of MMS approximation. In Proc. 32nd Intl. Joint Conf. Artif. Intell. (IJCAI), 2023.
3. Siddharth Barman and Sanath Kumar Krishnamurthy. Approximation algorithms for maximin fair division. ACM Transactions on Economics and Computation (TEAC), 8(1):1–28, 2020.